# Προσέγγιση Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης μέσω ΓΠ

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης

# Βεβαρημένη Κομβική Επικάλυψη

Δίνεται γράφος $G(V, E, w)$

$$\min w = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_i + x_j \geq 1, \forall [v_i, v_j] \in E \\ & x_i \in \{0, 1\}, \forall v_i \in V \end{aligned}$$

Δίνεται γράφος $G(V, E, w)$

$$
\begin{aligned}
\min w = & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \\
s.t. \quad & x_i + x_j \geq 1, \forall [v_i, v_j] \in E \\
& x_i \in \{0, 1\}, \forall v_i \in V
\end{aligned}
$$

Θα χαλαρώσουμε την απαίτηση ακεραιότητας των μεταβλητών

**Input:** Βεβαρημένος γράφος $G(V, E, w)$
**Output:** Κομβική κάλυψη $V' \subseteq V$

$V' \leftarrow \emptyset$
Βρες το τη βέλτιστη συνεχή λύση $x^*$ του προηγούμενου αντίστοιχου γραμμικού προβλήματος
**for** $i = 1$ έως $n$ **do**
  **if** $x_i^* \geq \frac{1}{2}$ **then**
    $V' \leftarrow V' \cup \{i\}$
  **end if**
**end for**
**return** $V'$

- Αν $x^*$ η βέλτιστη συνεχής λύση

# Προσεγγιστική Βεβαρημένη Κομβική Επικάλυψη

- Αν $x^*$ η βέλτιστη συνεχής λύση
- Ισχύει $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* \geq \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i x_i^* \geq \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i$

# Προσεγγιστική Βεβαρημένη Κομβική Επικάλυψη

- Αν $x^*$ η βέλτιστη συνεχής λύση
- Ισχύει $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* \geq \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i x_i^* \geq \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i$
- Ο τελευταίος όρος είναι και το κόστος της επικάλυψης που επιστρέφει ο προσεγγιστικός αλγόριθμος

# Προσεγγιστική Βεβαρημένη Κομβική Επικάλυψη

- Αν $x^*$ η βέλτιστη συνεχής λύση
- Ισχύει $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* \geq \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i x_i^* \geq \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i$
- Ο τελευταίος όρος είναι και το κόστος της επικάλυψης που επιστρέφει ο προσεγγιστικός αλγόριθμος
- Επιπλέον γνωρίζουμε πως η βέλτιστη συνεχής λύση σε ενα πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι πάντοτε μικρότερη από την βέλτιστη διακριτή

# Προσεγγιστική Βεβαρημένη Κομβική Επικάλυψη

- Αν $x^*$ η βέλτιστη συνεχής λύση
- Ισχύει $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* \geq \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i x_i^* \geq \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i$
- Ο τελευταίος όρος είναι και το κόστος της επικάλυψης που επιστρέφει ο προσεγγιστικός αλγόριθμος
- Επιπλέον γνωρίζουμε πως η βέλτιστη συνεχής λύση σε ενα πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι πάντοτε μικρότερη από την βέλτιστη διακριτή
- $W(V') \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* \leq \frac{1}{2} W(V^*)$

# Προσεγγιστική Βεβαρημένη Κομβική Επικάλυψη

- Αν $x^*$ η βέλτιστη συνεχής λύση
- Ισχύει $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* \geq \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i x_i^* \geq \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1 | x_i \geq \frac{1}{2}}^{n} w_i$
- Ο τελευταίος όρος είναι και το κόστος της επικάλυψης που επιστρέφει ο προσεγγιστικός αλγόριθμος
- Επιπλέον γνωρίζουμε πως η βέλτιστη συνεχής λύση σε ενα πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι πάντοτε μικρότερη από την βέλτιστη διακριτή
- $W(V') \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* \leq \frac{1}{2} W(V^*)$
- Προσεγγιστικός λόγος $\rho = \frac{W(V')}{W(V^*)} = 2$

# Ειδικές περιπτώσεις

- Αν ο γράφος έχει μια συγκεκριμένη δομή η ελάχιστη κομβική επικάλυψη μπορεί να βρεθεί σε πολυωνυμικό χρόνο

# Ειδικές περιπτώσεις

- Αν ο γράφος έχει μια συγκεκριμένη δομή η ελάχιστη κομβική επικάλυψη μπορεί να βρεθεί σε πολυωνυμικό χρόνο
  - Δένδρα
  - Δάση
  - Χορδικοί Γράφοι
  - Διμερείς Γράφοι
  - Interval Γράφοι